

Производная.

Приращение аргумента, приращение функции.

План урока:

- 1) Теоретический материал (сделать конспект, основные формулы и пример))
- 2) Самостоятельное выполнение заданий.

Теоретический материал.

Производная

12. Приращение функции

Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее изменение. Например, сила упругости пружины пропорциональна удлинению пружины; работа есть изменение энергии; средняя скорость — это отношение перемещения к промежутку времени, за который было совершено это перемещение, и т. д.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 со значениями этой функции в различных точках x , лежащих в окрестности x_0 , удобно выражать разность $f(x) - f(x_0)$ через разность $x - x_0$, пользуясь понятиями «приращение аргумента» и «приращение функции». Объясним их смысл.

Пусть x — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки x_0 . Разность $x - x_0$ называется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента*) в точке x_0 и обозначается Δx . Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что $x = x_0 + \Delta x$.

Говорят также, что первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx . Вследствие этого значение функции f изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции f* в точке x_0 , соответствующим приращению Δx , и обозначается символом Δf (читается «дельта эф»), т. е. по определению

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0), \quad (1)$$

откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

Обратите внимание: при фиксированном x_0 приращение Δf есть функция от Δx .

Δf называют также приращением зависимой переменной и обозначают через Δy для функции $y = f(x)$.

■ Пример 1. Найдем приращения Δx и Δf в точке x_0 , если $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$ и: а) $x = 1,9$; б) $x = 2,1$.

- а) $\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1$;
 $\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = -0,39$;
- б) $\Delta x = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1$;
 $\Delta f = f(2,1) - f(2) = 2,1^2 - 2^2 = 0,41$.

Самостоятельная работа.

178. Найдите приращение функции f в точке x_0 , если:

- а) $f(x) = -\frac{2}{x}$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0,1$;
- б) $f(x) = 2x^2 - 3$, $x_0 = 3$, $\Delta x = -0,2$;
- в) $f(x) = 3x + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0,01$;
- г) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0,1$.

179. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0 , если:

- а) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{2\pi}{3}$, $x = \frac{3\pi}{4}$;
- б) $f(x) = 4x - x^2$, $x_0 = 2,5$, $x = 2,6$;