

Тема 1. Теория пределов функции

Методические указания

Определение: Число A называется **пределом** функции $y = f(x)$ при x стремящемся к x_0 , если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое малое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условиям $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ или } f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0$$

Определение: Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Определение: Функция $y = f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

1. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$

Устранить данную неопределенность необходимо выделить значащие члены в числителе и в знаменателе, т.е. члены содержащие степень с наибольшим показателем.

Пример 1: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+x^2-4x^3}{x^2+7x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+x^2-4x^3}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5 \cdot \infty + \infty^2 - 4 \cdot \infty^3}{\infty^2 + 7 \cdot \infty - 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+x^2-4x^3}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6-5x+x^2-4x^3}{x^3}}{\frac{x^2+7x-3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x^3} - \frac{5x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{4x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} + \frac{7x}{x^3} - \frac{3}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x^3} - \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x} - 4}{\frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{\infty^3} - \frac{5}{\infty^2} + \frac{1}{\infty} - 4}{\frac{1}{\infty} + \frac{7}{\infty^2} - \frac{3}{\infty^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 - 0 + 0 - 4}{0 + 0 - 0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{0}$$

$$= \infty$$

Ответ: ∞

Пример 2: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+8x^2}{x^2+7x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+8x^2}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5 \cdot \infty + 8 \cdot \infty^2}{\infty^2 + 7 \cdot \infty - 3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x+8x^2}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6-5x+8x^2}{x^2}}{\frac{x^2+7x-3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{8x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} + 8}{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{\infty^2} - \frac{5}{\infty} + 8}{1 + \frac{7}{\infty} - \frac{3}{\infty^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 - 0 + 8}{1 + 0 - 0} = \frac{8}{1} = 8$$

Ответ: 8.

Пример 3: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x}{x^2+7x-3}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5 \cdot \infty}{\infty^2+7 \cdot \infty-3} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6-5x}{x^2+7x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6-5x}{x^2}}{\frac{x^2+7x-3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x^2} - \frac{5x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{7x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x}}{1 + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{\infty^2} - \frac{5}{\infty}}{1 + \frac{7}{\infty} - \frac{3}{\infty^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0-0}{1+0-0} = \frac{0}{1} = 0$$

Ответ: 0.

Самостоятельная работа.

Задание . Найти указанные пределы, раскрыв неопределённости

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2+3x}$;

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}$;

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+x}{x^2-4x^3}$;

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$;

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^3+1}$;

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4-x^3+2x}{x^4}$;

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{3x^3+x^2+1}$;

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x^3}{3x^2+5x}$;

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-1}{2x^3+x}$;

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2+2}$;